

DINÁMICA DE UNA VIGA CON RÓTULA ELÁSTICA INTERMEDIA, CARGA AXIAL Y CARGA TRANSVERSAL OSCILANTE

Javier L. Raffo^a

^a*Grupo de Mecánica Computacional, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Delta, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

Palabras Clave: Vibraciones Forzadas, Carga Axial, Dinámica Estructural, Solución Exacta.

Resumen. El análisis dinámico de vigas es un campo ampliamente estudiado por infinidad de investigadores por ejemplo cuando existen cargas transversales oscilantes sobre una viga y por otra parte ha sido también ampliamente tratado el caso de vibraciones libres de vigas cuando existe la acción de una carga axial. En este trabajo se trata el problema de vibraciones de vigas uniformes con extremos elásticamente restringidos sometidas a cargas axiales y cargas transversales que varían su intensidad armónicamente. Se presenta la ecuación diferencial y el problema de contorno obtenidos mediante el uso del cálculo de variaciones aplicado al caso de una viga Euler-Bernoulli con restricciones elásticas. La solución del problema se obtiene en forma exacta mediante el método de variación de parámetros. Se presentan resultados de vibraciones forzadas de la viga cuando se encuentra solicitada con una carga transversal variable en el tiempo y a su vez se encuentra solicitada con una carga axial. Se incluyen resultados de la viga analizando el efecto de la combinación de ambas cargas descritas.

1 INTRODUCTION

El análisis dinámico de vigas es un campo ampliamente estudiado por infinidad de investigadores por ejemplo cuando existen cargas transversales oscilantes sobre una viga y por otra parte ha sido también ampliamente tratado el caso de vibraciones libres de vigas cuando existe la acción de una carga axial. A continuación se presentan solo algunos trabajos existentes sin la intención de realizar una revisión de la bibliografía.

En cuanto al desarrollo del método propuesto, se utilizan las técnicas del cálculo de variaciones desarrollado en una gran variedad de textos sobre los aspectos teóricos y las aplicaciones en la determinación de problemas de contorno (Gelfand y Fomin, 1963; Troutman, 1996; Giaquinta y Hildebrandt, 1996; Dym y Shames, 1973; Kantorovich y Krylov, 1964; Hildebrand, 1965; Weinstock, 1974; Elsgoltz, 1962; Grossi, 2010).

El tratamiento de las condiciones de contorno con restricciones elásticas en los extremos, que permite generar infinidad de condiciones de contorno incluyendo las condiciones clásicas, fue presentado por varios autores (Grant, 1975; Hibbeler, 1975; Maurizi et al., 1976; Goel 1976a, b; Grossi y Laura, 1982; Nallim y Grossi, 1999). También fue tratado en numerosos trabajos el problema de vibraciones libres de vigas con restricciones elásticas intermedias. De Rosa et al. (1995) concretaron un estudio sobre vibraciones libres de vigas de espesor variable con restricciones elásticas intermedias. Arenas y Grossi (1999) determinaron soluciones exactas y aproximadas para una viga uniforme con un extremo y un punto intermedio elásticamente restringidos. Grossi y Albarracín (2003) determinaron las frecuencias de vibración de una viga con restricciones contra rotación y contra traslación en los extremos y en un punto intermedio. Raffo y Grossi (2012) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y el valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias.

En cuanto al problema de vibraciones forzadas, Bambill y Rossit (2002) estudiaron el problema de vibraciones forzadas de una viga con restricciones elásticas rotacionales en los extremos, con un sistema masa-resorte en un punto intermedio excitado con una fuerza oscilante. Abu-Hilal (2003) obtuvo la respuesta dinámica de una viga Euler-Bernoulli con cargas concentradas y distribuidas, por medio del método de las funciones de Green, para vigas de uno o varios tramos, con una o varias cargas y diferentes tipos de apoyos en los extremos. Bambill et. al (2003) obtuvieron la solución exacta del problema de vibraciones forzadas de una viga en voladizo, con una masa en el extremo libre sobre la cual actúa una carga concentrada oscilante. Wu (2005) presentó una solución clásica al problema de vibraciones forzadas de vigas y barras con condiciones de desplazamiento en los extremos.

En Raffo (2015) se presentan resultados de vibraciones forzadas de una viga con un número arbitrario de rótulas elásticas intermedias cuando actúa una carga transversal oscilante.

La revisión anterior de la bibliografía muestra que aún no se ha presentado la solución exacta del problema de vibraciones forzadas de vigas con una rótula intermedia cuando existe una carga axial actuante, que es el propósito del presente trabajo.

Se presentan comparaciones de resultados con otros autores y se presentan nuevos resultados de vibraciones forzadas de vigas con una rótula intermedia y cargas axiales.

2 PROBLEMA DE CONTORNO Y TRANSICIÓN

Sea una viga de dos tramos $[0, c_1]$ y $[c_1, l]$ que ejecuta vibraciones transversales y está sometida a una fuerza externa transversal dada por una función $q = q(x, t)$ de dirección opuesta al desplazamiento transversal u y está sometida a una carga de tensión $s = s(x)$ a lo largo de toda la viga. Los extremos y puntos intermedios de la viga están elásticamente restringidos contra rotación y traslación, tal como se muestra en la Figura 1. Los vínculos rotacionales están caracterizados por los coeficientes de rigidez r_1 , r_2 y r_c y los vínculos traslacionales por t_1 , t_2 y t_c .

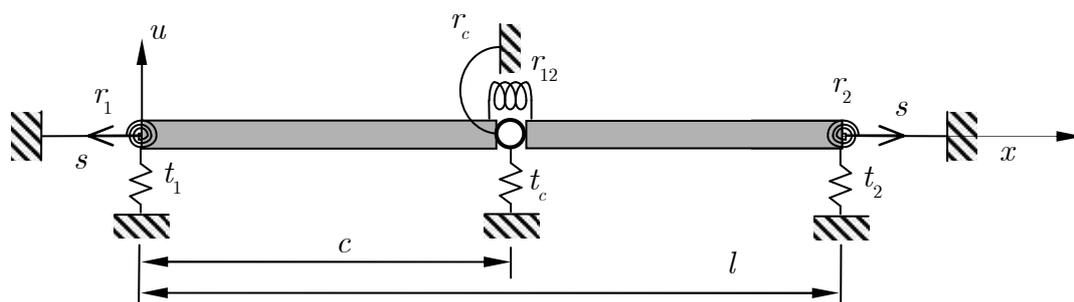


Figura 1: Sistema mecánico en estudio.

Si el desplazamiento transversal de la línea media correspondiente a un punto x y en un instante t , es descrito por la función $u = u(x, t), \forall x \in [0, l]$, la energía cinética de la viga antes descrita está dada por

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\int_0^c (\rho A)_1(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx + \int_c^l (\rho A)_2(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx \right] \quad (1)$$

donde, $(\rho A)_i = \rho_i A_i, i = 1, 2$ es el valor de la función resultante del producto de la densidad por el área de la sección correspondiente al tramo 1 y 2.

De acuerdo con la teoría del modelo de Euler-Bernoulli, la energía potencial total debida a la deformación elástica de la viga, la carga transversal, la deformación por la tensión axial y las restricciones elásticas, está dada por

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \left\{ \int_0^c \left[(EI)_1(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 + s(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 + 2q(x,t)u(x,t) \right] dx + \right. \\
& \int_c^l \left[(EI)_2(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 + s(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 + 2q(x,t)u(x,t) \right] dx \\
& + r_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0^+,t) \right)^2 + r_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(l^-,t) \right)^2 + r_c \left(\frac{\partial u}{\partial x}(l^-,t) \right)^2 \\
& + r_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c^+,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-,t) \right)^2 + t_1 \left(u(0^+,t) \right)^2 + t_2 \left(u(l^-,t) \right)^2 \\
& \left. + t_c \left(u(c,t) \right)^2 \right\},
\end{aligned} \tag{2}$$

donde las notaciones 0^+ , l^- , c^+ y c^- indican que se usan límites laterales y derivadas laterales y el producto $(EI)_i = E_i I_i, i = 1, 2$ denota la rigidez a la flexión correspondiente a cada tramo.

El principio de Hamilton establece que de todas las configuraciones posibles que el sistema puede tener, al pasar de una configuración dada en un instante t_a a otra dada en un instante t_b , la que realmente adopta es la que hace estacionario al funcional energético (Raffo, 2015; Grossi y Quintana, 2008)

$$\begin{aligned}
F(u) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \left[(\rho A)_1(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 - (EI)_1(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - s(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 - 2q(x,t)u(x,t) \right] dx + \int_c^l \left[(\rho A)_1(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - (EI)_1(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 - s(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 - 2q(x,t)u(x,t) \right] dx \right. \\
& \left. - r_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0^+,t) \right)^2 - t_1 \left(u(0^+,t) \right)^2 - r_c \left(\frac{\partial u}{\partial x}(l^-,t) \right)^2 - t_c \left(u(c,t) \right)^2 \right. \\
& \left. - r_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c^+,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-,t) \right)^2 - r_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(l^-,t) \right)^2 - t_2 \left(u(l^-,t) \right)^2 \right\} dt,
\end{aligned} \tag{3}$$

con el espacio de funciones admisibles dado por

$$\begin{aligned}
D = & \left\{ u; u(x, \bullet) \in C^2[t_a, t_b], u(\bullet, t) \in C([0, l]), u(\bullet, t) \in C^4[0, c], \right. \\
& \left. u(\bullet, t) \in C^4[c, l], u(x, t_a), u(x, t_b) \text{ dadas}, \forall x \in [0, l] \right\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

La condición de funcional estacionario que requiere el principio de Hamilton se formula matemáticamente mediante el planteo:

$$\delta F(u; v) = 0, \forall v \in D_a, \quad (5)$$

donde D_a es el espacio de direcciones admisibles y está dado por

$$D_a = \left\{ v; v(x, \bullet) \in C^2[t_a, t_b], v(\bullet, t) \in C([0, l]), v(\bullet, t) \in C^4[0, c], \right. \\ \left. v(\bullet, t) \in C^4[c, l], v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0, \forall x \in [0, l] \right\}. \quad (6)$$

El desarrollo de las técnicas del cálculo de variaciones (Grossi, 2010) permite obtener que la función u debe satisfacer las ecuaciones diferenciales:

$$(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + q(x, t) = 0, \quad (7) \\ \forall x \in (0, l), i = 1, 2, t \geq 0,$$

con las siguientes condiciones de contorno, transición y compatibilidad del desplazamiento en $x = c$:

$$r_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) = (EI)_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t), \quad (8)$$

$$t_1 u(0^+, t) = s(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t) \right), \quad (9)$$

$$r_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) = -(EI)_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l^-, t), \quad (10)$$

$$t_2 u(l^-, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l^-, t) \right) - s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t), \quad (11)$$

$$r_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) \right) - r_c \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) = (EI)_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c^-, t), \quad (12)$$

$$r_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) \right) = (EI)_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c^+, t), \quad (13)$$

$$t_c u(c, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_1(c^-) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c^-, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_2(c^+) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c^+, t) \right) \\ - s(c^-) \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) + s(c^+) \frac{\partial u}{\partial x}(c^+, t), \quad (14)$$

$$w(c^-, t) = w(c^+, t), \quad (15)$$

donde $t \geq 0$.

Las ecuaciones (8) a (11) corresponden a las condiciones de contorno, las ecuaciones (12) a

(15) corresponden a las condiciones de transición.

3 VIBRACIONES NATURALES

Para realizar un análisis de vibraciones libres y determinar los modos normales de vibración del sistema mecánico se deben determinar los valores de las frecuencias naturales para los cuales las ecuaciones diferenciales (7) tienen como solución no trivial

$$u_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{i,n}(x) \cos \omega t, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

donde $u_{i,n}$ corresponde al modo n –ésimo de vibración natural. Si se incluye el cambio de variables $\bar{x} = x / l$ en las Ecs. (7) a (15), y se considera que $(\rho A)_i$, la rigidez a la flexión y s son constantes entre 0 y l . La solución exacta del problema mecánico en estudio está dado por (Grossi y Quintana, 2008)

$$u_{1,n}(\bar{x}) = A_1 \cosh a_1 \bar{x} + A_2 \sinh a_1 \bar{x} + A_3 \cos b_1 \bar{x} + A_4 \sin b_1 \bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in [0, \bar{c}], \quad (17)$$

$$u_{2,n}(\bar{x}) = A_5 \cosh a_2 \bar{x} + A_6 \sinh a_2 \bar{x} + A_7 \cos b_2 \bar{x} + A_8 \sin b_2 \bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in [\bar{c}, l], \quad (18)$$

donde $a_i = \sqrt{-\frac{S^2}{2} + \sqrt{\frac{S^4}{4} + \lambda^4}}$, $b_i = \sqrt{\frac{S^2}{2} - \sqrt{\frac{S^4}{4} + \lambda^4}}$, $i = 1, 2$, $\bar{c} = c / l$ y

$$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4. \quad (19)$$

Sustituyendo las Ecs. (17) y (18) en la Ec. (16) y en las correspondientes condiciones de contorno y transición dadas por Ecs. (8) a (15), expresadas en términos de la nueva variable \bar{x} , se obtienen ocho ecuaciones homogéneas con las constantes A_i como incógnitas.

Para obtener una solución no trivial del problema, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo. Siguiendo este procedimiento se obtiene la ecuación de frecuencias:

$$G(T_i, R_i, T_c, R_c, R_{12}, S, \lambda, \bar{c}) = 0, \quad (20)$$

donde $T_1 = \frac{t_1 l^3}{EI}$, $R_1 = \frac{r_1 l}{EI}$, $T_2 = \frac{t_2 l^3}{EI}$, $R_2 = \frac{r_2 l}{EI}$, $T_c = \frac{t_c l^3}{EI}$, $R_c = \frac{r_c l}{EI}$, $R_{12} = \frac{r_{12} l}{EI}$, $S = \frac{s l^2}{EI}$.

4 VIBRACIONES FORZADAS

Si se propone a la solución de la Ec. (7) en series de funciones:

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\bar{x}) Z_n(t), \quad (21)$$

se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned} & \frac{\rho Al^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\bar{x}) \frac{d^2 Z_n(t)}{dt^2} - S \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \frac{d^2 U_n(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \frac{d^4 U_n(\bar{x})}{d\bar{x}^4} = \bar{q}(\bar{x}, t), \forall \bar{x} \in (0, 1), i = 1, 2, t \geq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

donde $\bar{q} = \frac{ql^4}{EI}$, Z_n es la función generalizada que depende del tiempo asociada al n –ésimo modo y U_n es la solución del problema homogéneo asociada al n –ésimo modo de la ecuación diferencial del problema de autovalores

$$\frac{d^4 U_n(\bar{x})}{d\bar{x}^4} - S \frac{d^2 U_n(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \lambda_n^4 U_n(\bar{x}) = 0, \quad (23)$$

donde λ_n es el valor de λ para el n –ésimo modo.

Si se reemplaza en la Ec. (22) la derivada de cuarto orden por el valor equivalente obtenido de la Ec. (23) se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho Al^4}{EI} \left[\sum_{n=1}^{\infty} U_n(\bar{x}) \frac{d^2 Z_n(t)}{dt^2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\bar{x}) \omega_n^2 Z_n(t) \right] = \bar{q}(\bar{x}, t), \\ & \forall \bar{x} \in (0, 1), t \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Al multiplicar Ec. (24) por $U_m(\bar{x})$ e integrando en el dominio resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\rho Al^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Z_n(t)}{dt^2} \left[\int_0^{\bar{c}} U_n(\bar{x}) U_m(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\bar{c}}^1 U_n(\bar{x}) U_m(\bar{x}) d\bar{x} \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 Z_n(t) \left[\int_0^{\bar{c}} U_n(\bar{x}) U_m(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\bar{c}}^1 U_n(\bar{x}) U_m(\bar{x}) d\bar{x} \right] \\ & = \int_0^{\bar{c}} \bar{q}(\bar{x}, t) U_m(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\bar{c}}^1 \bar{q}(\bar{x}, t) U_m(\bar{x}) d\bar{x}, \forall \bar{x} \in (0, 1), t \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Si en la Ec. (25) se considera la condición de ortogonalidad de las autofunciones $U_n(\bar{x})$ y $U_m(\bar{x})$ del problema homogéneo para el modo n y m respectivamente, resulta

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Z_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 Z_n(t) = \frac{1}{\eta} \left[\int_0^{\bar{c}} \bar{q}(\bar{x}, t) U_n(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\bar{c}}^1 \bar{q}(\bar{x}, t) U_n(\bar{x}) d\bar{x} \right], \\ & \forall \bar{x} \in (0, 1), n = 1, \dots, \infty, t \geq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

donde $\eta = \frac{\rho Al^4}{EI} \left[\int_0^{\bar{c}} (U_n(\bar{x}))^2 d\bar{x} + \int_{\bar{c}}^1 (U_n(\bar{x}))^2 d\bar{x} \right]$.

Al aplicar las técnicas del método de variación de parámetros para obtener el valor de Z_n de la Ec. (26) resulta (Grossi, 2007)

$$\begin{aligned}
Z_n(t) &= \left[A_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + B_n \operatorname{cos}(\omega_n t) \right] \\
&+ \frac{1}{\eta \omega_n} \int_0^t \operatorname{sen}(\omega_n(t-\tau)) \left[\int_0^{\bar{c}} \bar{q}(\bar{x}, t) U_n(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\bar{c}}^1 \bar{q}(\bar{x}, t) U_n(\bar{x}) d\bar{x} \right] d\tau, \quad (27) \\
\forall \bar{x} &\in (0,1), n = 1, \dots, \infty, t \geq 0,
\end{aligned}$$

donde τ es la variable de integración, A_n y B_n son los coeficientes relacionados con las condiciones iniciales. Si se considera el caso en que la carga está aplicada puntualmente en $x = a$, con $a \in [0,1]$, y su variación temporal es armónica simple con una frecuencia de excitación ω_f , esto es

$$\int_0^{\bar{c}} \bar{q}(\bar{x}, t) U_n(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\bar{c}}^1 \bar{q}(\bar{x}, t) U_n(\bar{x}) d\bar{x} = \delta(x-a) P \operatorname{sen}(\omega_f t), \quad (28)$$

de la Ec. (21) y la Ec. (27) se obtiene finalmente que la respuesta dinámica del desplazamiento transversal del sistema está dado por

$$\begin{aligned}
u(\bar{x}, t) &= \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + B_n \operatorname{cos}(\omega_n t) \right] U_n(\bar{x}) + \frac{U_n(\bar{x}) U_n(\bar{a}) P \left[\omega_f \operatorname{sen}(\omega_n t) - \omega_n \operatorname{sen}(\omega_f t) \right]}{\eta \omega_n (\omega_f^2 - \omega_n^2)} \right\}, \quad (29) \\
\forall t &> 0, \bar{x} \in (0,1).
\end{aligned}$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga, se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado, S denota que el extremo está simplemente apoyado y L denota que el extremo está libre. Como ejemplo, si se indica la condición de borde de una viga E-S, denota que el primer tramo, en $\bar{x} = 0$, el extremo se encuentra empotrado, mientras que en el segundo tramo, en $\bar{x} = 1$, el extremo se encuentra simplemente apoyado.

Para todos los casos analizados se considera una viga de largo $l = 1m$, con una sección rectangular de 7 cm de ancho y 1 cm de alto, con $E = 20.610^{11} N/m^2$ y $\rho = 7850 kg/m^3$. Se considera hasta el sexto modo para el cálculo de la respuesta temporal.

En la Figura 2 se presenta la respuesta temporal de $u(b, t)$ para el caso A-A, con $R_c = T_c = 0$, $R_{12} = \infty$, $P = 1N$, $a = 0.6$, $b = 0.9$, siendo $\omega_1 = 145.951278 1/s$, la frecuencia de oscilación natural correspondiente al modo 1. Se considera el caso de $\omega_f = d\omega_1$, con $d = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ y 0.99 . Los resultados muestran como varía la amplitud de la oscilación cuando la frecuencia ω_f es cercana a la frecuencia de oscilación natural del modo 1.

En la Figura 3 se presenta la respuesta temporal de $u(b, t)$ para el caso A-A, con $R_c = T_c = 0$, $R_{12} = \infty$, $P = 1N$, $a = 0.6$, $b = 0.9$, para $\omega_f = 0.9\omega_1$, $S = 0, 10^3, 10^4$ y

10^5 .

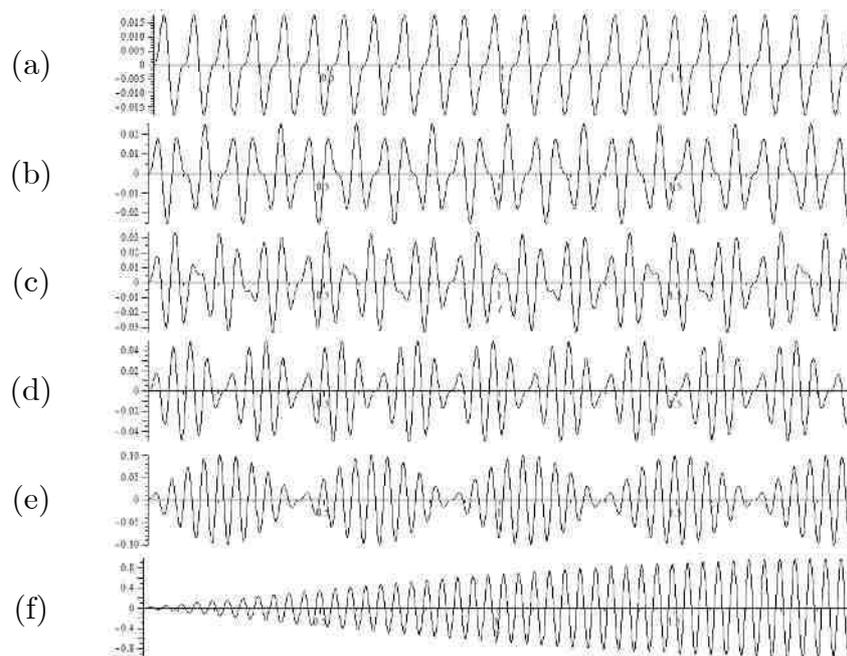


Figura 2: Respuesta temporal de $u(b,t)$ para una viga A-A, con $P = 1 N$, $S = 0$, $a = 0.6$, $b = 0.9$, para (a) $\omega_f = 0.5\omega_1$, (b) $\omega_f = 0.6\omega_1$, (c) $\omega_f = 0.7\omega_1$, (d) $\omega_f = 0.8\omega_1$, (e) $\omega_f = 0.9\omega_1$, (f) $\omega_f = 0.99\omega_1$, para $0 \leq t \leq 2 s$.

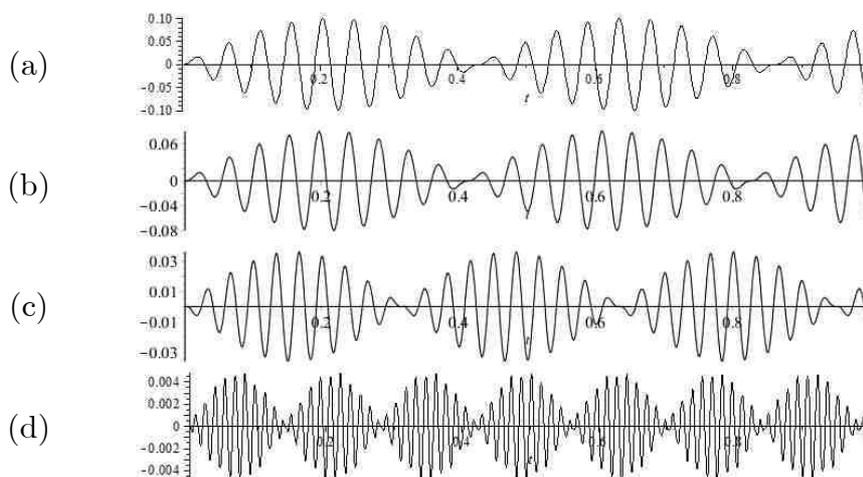


Figura 3: Respuesta temporal de $u(b,t)$ en $[mm]$ para una viga A-A, con $P = 1 N$, $a = 0.6$, $b = 0.9$, $\omega_f = 0.9\omega_1$, para (a) $S = 0$, (b) $S = 10^3$, (c) $S = 10^4$, y (d) $S = 10^5$, para $0 \leq t \leq 1 s$.

En la Figura 4 se presenta la respuesta temporal de $u(b,t)$ para una viga A-A, con $R_c = T_c = 0$, $R_{12} = \infty$, $S = 0$, $a = 0.6$, $b = 0.9$, siendo $\omega_1 = 145.951278 1/s$, $\omega_f = 0.9\omega_1$, para $P = 1 N, 10 N$ y $100 N$.

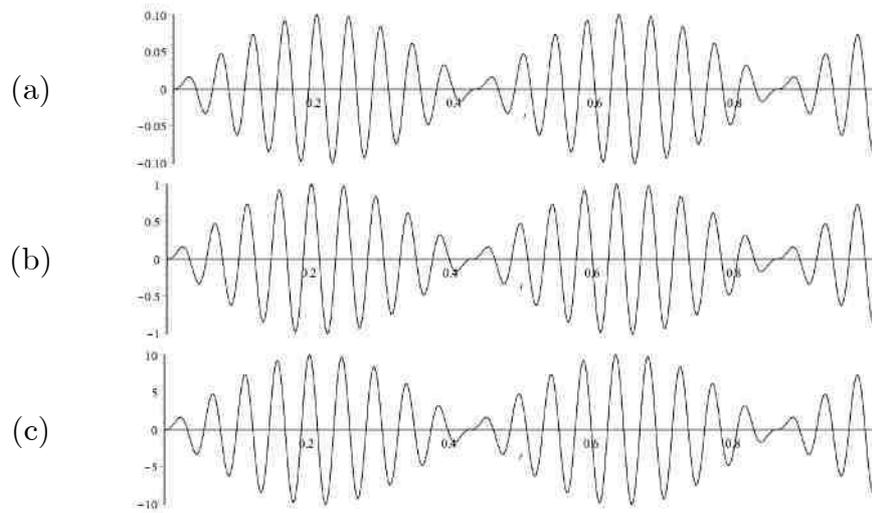


Figura 4: Respuesta temporal de $u(b,t)$ en $[mm]$ para una viga A-A, con $S = 0$, $a = 0.6$, $b = 0.9$, $\omega_f = 0.9\omega_1$, para (a) $P = 1 N$, (b) $P = 10 N$, y (c) $P = 100 N$, para $0 \leq t \leq 1 s$.

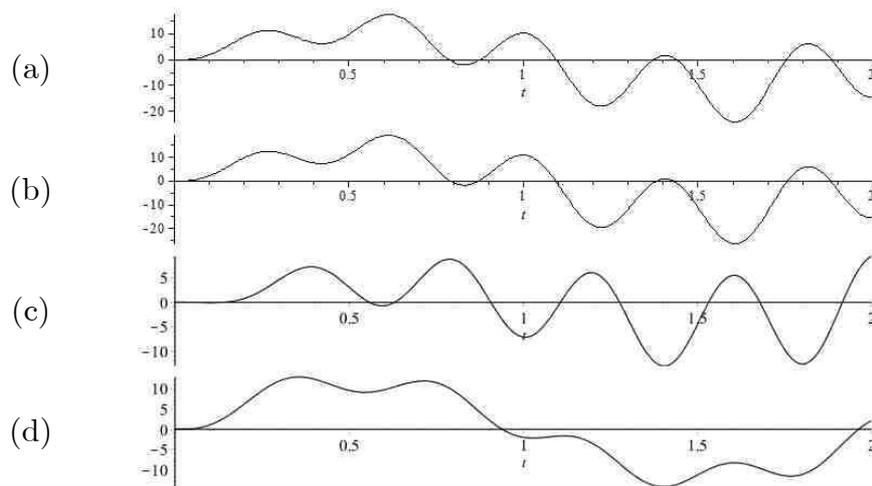


Figura 5: Valores de $u(b,t)$ en $[mm]$ para una viga con $R_1 = T_1 = 1000$, $c = 0.5$, $R_c = R_{12} = T_c = R_2 = T_2 = 1$, $P = 1 N$, $S = 0$, $b = 0.9$, $\omega_f = 0.9\omega_1$, para (a) $a = 0.2$, (b) $a = 0.4$, (c) $a = 0.6$, y (d) $a = 0.8$, para $0 \leq t \leq 2 s$.

En la Figura 5 se presentan los valores de $u(b,t)$ para una viga con $R_1 = T_1 = 1000$, $c = 0.5$, $R_c = R_{12} = T_c = R_2 = T_2 = 1$, $P = 1 N$, $S = 0$, $b = 0.9$, $\omega_f = 0.9\omega_1$, siendo $\omega_1 = 16.476668 \text{ 1/s}$, $\omega_f = 0.9\omega_1$, para $a = 0.2$, 0.4 , 0.6 y 0.8 .

6 CONCLUSIONES

Se presentó la solución exacta para una viga con restricciones generales con una rótula elástica intermedia cuando existe una carga axial y una carga transversal puntual oscilante.

Se desarrolló un algoritmo que permite obtener resultados numéricos para casos generales de vibraciones libres y forzadas. El mismo permite generar resultados cuando existe una carga

axial combinado con una carga forzada oscilante.

Se presentaron resultados de la respuesta temporal del desplazamiento transversal de una viga para diferentes condiciones de carga, restricciones y ubicación de la carga oscilante.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte del proyecto UTN 3487.

REFERENCIAS

- Abu-Hilal, M., Forced vibrations of Euler-Bernoulli beams by means of dynamic Green functions. *Journal of Sound and Vibration*, 267:191-207, 2003.
- Arenas, B. B. y Grossi, R. O., Vibration frequencies for a beam with a rotational restraint in an adjustable position. *Applied Acoustics*, 57:197-202, 1999.
- Bambill, D. V., Escanes, S. J. y Rossit, C. A., Forced vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end with an external periodic disturbance acting on the mass with applications in ships' structures. *Ocean Engineering*, 30:1065-1077, 2003.
- Bambill, D. V. y Rossit, C. A., Forced vibrations of a beam wlastically restrained against rotation and carrying a spring-mass system, *Ocean Engineering*, 29:605-626, 2002.
- De Rosa, M. A., Bellés, P. M. y Maurizi, M. J., Free vibrations of stepped beams with intermediate elastic supports. *Journal of Sound and Vibration*, 181:905-910, 1995.
- Dym, C. y Shames, I., *Solid Mechanics: A Variational Approach*. Mc Graw Hill Book Company, New York, 1973.
- Elsogoltz, L., *Calculus of Variations*. Addison-Wesley, 1962.
- Gelfand, I. y Fomin, S., *Calculus of Variations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- Giaquinta, M. y Hildebrandt, S., *Calculus of Variations I*. Springer-Verlag, Berlín, 1996.
- Goel, P., Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends. *Journal of Sound and Vibration*, 47:9-14, 1976a.
- Goel, P., Transverse vibrations of tapered beams. *Journal of Sound and Vibration*, 47:1-7, 1976b.
- Grant, A., Vibration frequencies for a uniform beam with one end elastically supported and carrying a mass at the other end. *Journal of Applied Mechanics*, 42: 878-880, 1975.
- Grossi, R.O., *Cálculo de Variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, Barcelona, 2010.
- Grossi, R.O., *Ecuaciones diferenciales*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, 2007.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C., Eigenfrequencies of generally restrained beams. *Journal of Applied Mathematics*, 10:503-516, 2003.
- Grossi, R. O. y Laura, P. A. A., Further results on a vibrating beam with a mass and spring at the end subjected to an axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 84:593-594, 1982.
- Grossi, R. O., Quintana, M. V., The transition condition in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Hibbeler, C., Free vibrations of a beam supported with unsymmetrical spring-hinges. *Journal of Applied Mechanics*, 42:501-502, 1975.
- Hildebrand, F., *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall, New Jersey, 1965.
- Kantorovich, L. y Krylov, V., *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience Publishers, New York, 1964.
- Maurizi, R., Rossi, R. y Reyes, J., Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring hinged and subjected to a translational restraint at the other end. *Journal of Sound*

- and Vibration*, 48:565-568, 1976.
- Nallim, L. y Grossi, R. O., A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams. *Applied Acoustics*, 57:345-356, 1999.
- Raffo, J. L., *Mecánica de Elementos Estructurales con Fallas Localizadas*. Tesis Doctoral, FI-UNSA, 2015.
- Raffo, J. L. y Grossi, R. O., A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints. *Mecánica Computacional*, 26:2593-2610, 2012.
- Troutman, J. L., *Variational Calculus and Optimal Control*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- Weinstock, R., *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*. Dover Publications, New York, 1974.
- Wu, S. R., Classical solutions of forced vibration of rod and beam driven by displacement boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 279:481-486, 2005.